祖沖之の數學的業績(1) 圓周率の算定

AUTHOR(S):

武田, 時昌

CITATION:

武田, 時昌. 祖沖之の數學的業績(1) 圓周率の算定. 東方學報 2000, 72: 658-690

ISSUE DATE:

2000-03-31

URL:

https://doi.org/10.14989/66815

東方學報　京都第72册（2000）：690—658頁

祖沖之の數學的業績(1)　圓周率の算定

武　田　時　昌

は　じ　め　に

傳存する算術書によって中國數學の理論的な發展を概觀すれば，２つのピークを形成しているように思われる。最も高くそびえる峰は，13世紀中頃に著された秦九韶の『數書九章』（1247），李冶の『測圓海鏡』（1248）『益古演段』（1259）である。そこでは，不定方程式，高次方程式の高度な解法が展開されている。それ以前においては，劉宋の祖沖之の『綴術』が傑出した存在である。

唐初までの主要な算術書を集錄し，注釋を施した李淳風等撰定『十部算經』の中で，『綴術』は最も高度な數學理論を展開していたと考えられている。しかし，その難解さゆえに，『隋書』律曆志上が，祖沖之の數學的業績を記述した後に，「學官は其の深奥を究むること能う莫し。是の故に廢して理らず」と語るように，後には傳わらない。『十部算經』は，北宋の元豐７年（1084）に祕書省で刊刻されたが，その時には『夏侯陽算經』とともに『綴術』は散佚してしまっていた。算術書においては，唐初の王孝通『緝古算經』，『九章算術』李淳風注に論及されるのを最後に，まったく途絶えてしまうのである。

中國數學の理論的基盤は，『九章算術』の編纂に始まり，『十部算經』に集約されて確立するが，『綴術』の亡佚は，その發展過程を考察するうえで，大きな斷層を生じている。しかし，中國數學の理論形成において，祖沖之の數學的業績を十分に把握しなければ，中國における數學理論が如何なる方向性を有するものであったのか，そして秦九韶・李冶を中心とする宋元數學の理論的な飛躍がどのようにして生み出されたのかを解明することはできないだろう。

『綴術』の内容について，まったく考察の手がかりがないわけではない。『九章算術』の李淳風注や『隋書』律曆志に斷片的な形であるが具體的な言及が見られる。それらによれば，明らかに『九章算術』劉徽注を研究の基點とし，それをさらに發展させようとしたところが窺える。その代表的な例は，圓周率の算定である。

これまでの研究において，劉徽と祖沖之が精度の高い圓周率を發見したことは廣く知ら

れている。しかし，彼らの業績には混同されているところがあり，劉徽から祖沖之への理論的な發展を十分に評價することができないままでいるように思われる。

そこで，本稿では，祖沖之の數學的業績を考究する第一歩として，彼が算定した圓周率の數理的な分析を試みたい[1]。

1　徽率と密率

『隋書』律暦志上には，祖沖之の算定した圓周率に關して，次のように記されている。

古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆・張衡・劉徽・王蕃・皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末，南徐州從事史祖沖之，更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九豪二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九豪二秒六忽。正數在盈朒二限之閒。密率圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率圓徑七，周二十二。

この記述によって，祖沖之が，圓周率が盈數と朒數の２數の閒にあること（$3.1415926<\pi<3.1415927$）を算定し，そして圓周率を用いた計算を行う上での比率を，密率355/113，約率22/7という分數値によって示したことがわかる。

祖沖之の前には，「(圓周率の）新率を設けたが，過不足なく數を增減して（原文「折衷」）眞値を得るには至らなかった」人物として，劉歆・張衡・劉徽・王蕃・皮延宗の名が擧げられている。

彼らと祖沖之の算定法を比較するにあたっては，考察すべき中心的な議論が存在する『九章算術』劉徽注の現行本[2]に，いくつかの校勘を行う必要がある。

すなわち，劉徽は，『九章算術』巻１，問31・32，圓田術の注釋において，圓３徑１の率（$\pi=3$）は，圓に內接する正６角形の外周の長さを求めているにすぎないことを指摘し，割圓術と後に呼ばれる手法を用いて，157/50（$=3.14$）の新率（徽率）を算出している。

ところが，圓田術の劉徽注には，次の文が續く。

謹按圖驗，更造密率。恐空設法，數昧而難譬。故置諸検括，謹詳其記注焉。……a_1

そして，以下の注釋では，割圓術を用いた數値計算を具體的に論述する。すなわち，半徑１尺の圓に內接する正６角形を分割していき，正192角形の面積を求めて，徽率を算定する。そして，その圓周の長さが「微少」値であることを確認し，さらに分割して3927/1250（$=3.1416$）という「密率」[3]が得られるとする。もしもこれを劉徽注として考えるならば，祖沖之の約率よりも精密な圓周率を劉徽がすでに求めていたことになる。

この劉徽注の後には，「臣淳風等謹按……」と李淳風の注釋が存在するが，劉徽と祖沖之の圓周率に關する言及がある。すなわち，その後半部で次のように言う。

（圓3徑1の率について）劉徽は獨り粗略であると考え，そこでその率を改正しようとした。ただし，（圓の面積を求めるための）圓周，直徑を相乘する計算は，數はぴったり一致させ難いところがある。劉徽は，この二法を考えだしたものの，結局のところ纖毫（微小な數値）まで究めつくすことはできなかった。祖沖之は，それ（劉徽の新率）が精密でない（「不精」）とし，とりわけその數を推究した。今，（『九章算術』の注釋書を）修撰するにあたって，諸家（の所說）を拾い集め，その是非を檢討すると，祖沖之（の圓周率）が精密（「密」）であるように思われる。そこで，これを徽術の下に明記し，研究する者の裁定を仰ぎたいと思う。

すなわち，祖沖之が算定した數値が諸家の中で最も精密であることを明言している。これは，『隋書』律曆志の記述とぴったり合致するが，律曆志の編纂には李淳風が參畫したとされるから，當然のことである。

「徽雖出斯二法」の「二法」は，大典本では「一法」に作る。南宋本，楊輝本ともに「二法」とあり，錢寶琮の校勘では，157/50と3927/1250の圓周率の二法を指すと考え，そのままにする。ところが，「二法」ままだと，李淳風注の言說と矛盾するように思われる。

というのは，劉徽は，$\pi=3$ を用いる計算に對して，自ら求めた圓周率，いわゆる「徽率」を用いた解法公式（「徽術」）によって修正した計算値を揭げる。上揭の李淳風注の末尾に「之を徽術の下に顯らかにす」とあるのは，「於徽術……」として徽率よる修正値を記している劉徽注の下に，「依密率……」として祖沖之の「密率」による補正値を注記したことを指す。

例を擧げて說明すれば，第1章，第31題では，周30步，徑10步の圓田の面積を求める。答えは75（平方）步である。これは，「周徑相乘，四而一」又は「徑自相乘，三之，四而一」，「周自相乘，十二而一」の圓田術の解法公式のいずれかを用いて，$30\times10\div4=10\times10\times3\div4=30\times30\div12=75$の計算をしたものである。

この經文に注釋して，劉徽は，

此於徽術，當爲田七十一步，一百五十七分步之一百三。

と述べ，圓周と徽率によって修正値71 103/157（平方）步を示す。すなわち，圓周率に徽率157/50を用いて，「周自相乘，十二而一」を「周自相乘，以二十五乘之，三百一十四而一」と改めた解法公式（徽術）によって，$30\times30\times25\div314=71\ 103/157$の計算をしたものである。

この劉徽注に續く李淳風注は,

臣淳風等謹〔按〕,依密率,爲田七十一步,二十二分之一十三。

と密率による補正値71 13/22(平方)歩を示す。この場合の「密率」は,22/7である。すなわち,「周自相乘,以七乘之,八十八而一」の補正公式を用い,$30\times30\times7\div88=71$ 13/22の計算をしたものである。

『算經十書』の李淳風注において,「密率」による補正値を随所に掲げるが,すべて22/7を用いおり,例外は1つもない。つまり,諸家と比べて最も精密であると評した祖沖之の「密率」とは,祖沖之の密率355/113ではなく,約率22/7を念頭に置いているのである。

祖沖之が算定した圓周率は,$3.1415926<\pi<3.1415927$であったが,約率22/7は3.142857……,密率は355/113=3.1415929……,劉徽の「二法」は157/50=3.14,3927/1250=3.1416である。そこで,それらを不等式にすれば,

$$3<157/50<3.1415926<\pi<3.1415927<355/113<3927/1250<22/7$$

となる。劉徽の「二法」とした3927/1250は,李淳風注が言う「密率(實は約率)」よりも眞値及び祖沖之の密率に近い數値なのである。

そうであるならば,前揭の李淳風注で,劉徽の「二法」を「終に其の纖毫を究むる能わざるなり」とし,それを「不精」とする祖沖之の約率を,諸家と比べて最も「密」であると評したのでは,理に合わない。また,劉徽が「密率」の3927/1250を算出していたというならば,徽率が誤差を含んだ粗率であることを知っていながら,あえてそれを用いた,という妙な話になる。

したがって,原テキストに「一法」とあったのが,「二法」に變わったと考えざるを得ないだろう。ならば,3927/1250を算出した圓田術の劉徽注をどのように考えればいいのだろうか。

その劉徽注をよく見ると,圓に內接する正192角形の面積から徽率を算出した論說(a_2)の後に,王莽銅斛に關する次のような論及が見られる。

晉武庫中,漢時王莽作銅斛,其銘曰,「律嘉量斛,內方尺而圓其外,庣旁九釐五毫,冪一百六十二寸,深一尺,積一千六百二十寸,容十斗」。以此術求之,得冪一百六十一寸有奇。其數相近矣。……a_3

王莽銅斛とは,王莽の新王朝が用いた度量衡の標準器の1つである銅製の1斛枡のことである。a_3では,その銘文に記された圓柱形の銅斛の寸法から,徽率を用いて體積を計算し,記載よりもやや小さい値になることを確認する。そこで,正192角形をさらに分割して,もう一つの「密率」3927/1250を算出する。

清の李潢は,『九章算術細草圖說』において,「晉武庫中」以下の劉徽注は,「祖沖之

の語」に依據した李淳風の注釋が混入したものであるとする。しかし，多くの數學史研究者は，それに異論を唱え，劉徽注であるとする[5]。彼らが言うように，前後の文脈から見れば一連の記述であり，「晉武庫中」以下だけを切り放して後人の注釋とすることには無理がある。しかしながら，李潢が「祖沖之の語」とするだけの根據が確かにある。李潢が引證する『隋書』律曆志の記載（後述）がそれであるが，內容的に愼重に檢討しないと，劉徽注であるのか，祖沖之に依據した李淳風注であるのか，實に紛らわしいものになっている。

議論を最も混亂させたのは，『九章算術』卷5，商功章の劉徽注において，王莽銅斛が2箇所で言及されていて，しかもその一部が『九章算術』劉徽注として『晉書』律曆志，『隋書』律曆志にそのまま引用されているところにある。それは，劉徽注とする證據であるように見えて，實はそうではない。

結論だけを先に言ってしまえば，a_1 の「謹按圖驗」以下は，劉徽注ではなく，李淳風注である。他の箇所において，李淳風注は「臣淳風等謹按……」という形式で記載されているから，「臣淳風等」の四文字が缺落しているのである。「謹んで按ずるに，圖を驗べると，更に密率に造る」と言うのは，劉徽による割圓術による圖解をもっと考究すれば，徽率をさらに精密にした「密率」を求めることができることを述べたものである。その後文に付された上揭の李淳風注は，前の論說が祖沖之に依據するものであることを明言したものとして，理解すべきであろう。祖沖之の約率を「密率」とし，3927/1250（＝3.1416）を導出していることについては，祖沖之の算定法をそのまま轉載したのではなく，李淳風自身が試算を行ったものであることを示唆している。

實際に計算內容を分析すれば，それらの劉徽注は，祖沖之の算術に依據した李淳風の注解であるとすることに何の支障もないように思われる。その錯簡を見拔いた李潢の眼力は確かである。しかし，「謹按圖驗」以下から全文を李淳風注としなかったために，反論の餘地を與えてしまい，これまでの研究では劉徽注とする說のほうがむしろ有力であった。それが祖沖之の研究を遲滯させた要因となったのだから，誠に遺憾であると言わざるを得ない。少し煩瑣な議論になるが，李淳風注であることをはっきりと論定しないわけにはいかないだろう。

2　劉徽注の再檢討

『九章算術』卷5，商功章で，王莽銅斛に言及した劉徽注は，問23・24・25と問28に對する注釋の2箇所である。

まず，確かに劉徽注であると思われる前者を議論したい。問23・24・25は，圓錐形（圓錐・半圓推・4分の1圓錐）に積み上げた穀物（粟・菽・米）の分量を計算する委粟術の設問である。下周（底面の圓周の長さ）と高さから體積を求めた後で，粟1斛，體積2尺7寸（2700立方寸）を換算率として，粟の分量を算出する。米，菽の場合には，巻2，粟米章に掲げる「粟米之法」の精粗の比率，粟率50，米率30，菽率45によって，菽は粟の10分の9倍の體積2尺4寸（2400立方寸），米は粟の5分の3倍の體積1尺6 1/5寸（1620立方寸）を換算率とする。

劉徽は，そのことを注解した後に，

故謂此三量器爲槩而皆不合於今斛。（ここで考えるに，これら3つの（粟・菽・米1斛分の體積になるように寸法を定めた）量器で計量しても，いずれも現今の（標準枡で量った）1斛とは合致しない。）

と述べ，以下で次のような考察を展開する。

當今大司農斛，圓徑一尺三寸五分五釐，正深一尺。於徽術，爲積一千四百四十一寸，排成餘分，又有十分寸之三。……b_1

王莽銅斛，於今尺爲深九寸五分五釐，徑一尺三寸六分八釐七毫。以徽術計之，於今斛爲容九斗七升四合有奇。……b_2

『周禮』考工記，「桌氏爲量，深一尺，内方一尺，而圓其外，實一鬴」。於徽術，此圓積一千五百七十寸。……b_3

左氏傳曰，「齋舊四量，豆，區，釜，鍾。四升曰豆，各自其四，以登於釜。釜十則鍾」。鍾六斛四斗，釜六斗四升，方一尺，深一尺，其積一千寸。若此方積容六斗四升，則通外圓積成量容十斗四合一龠，五分龠之三也。以數相乘之，則斛之制方一尺而圓其外，庣旁一釐七毫，冪一百五十六寸，四分寸之一，深一尺，積一千五百六十二寸半，容十斗。王莽銅斛與漢書律曆志所論斛同。……b_4

そして，b_1 の文において，當時に用いた標準枡器である「大司農斛」の寸法を記載し，それから1斛の體積を，自ら定めた圓周率（徽率）を用いて，約1441.3平方寸と算定する。

$$(13.55)^2\times 10\times 157\div 200=1441.279625\fallingdotseq 1441.3\ (=V_0)$$

これが，「今斛」である。なお，「大司農斛」について，後漢時代のものであるが，「大司農」という銘のある枡がいくつか傳存している(6)。

b_2 において，王莽銅斛の深さと直徑を（今尺で）計った寸法から，王莽銅斛の1斛が今斛で量ると9斗7升4合有奇となることを指摘する。

$$(13.687)^2\times 9.55\times 157\div 200=1404.39593210075=V_1\quad V_1/V_0=0.974\cdots\cdots$$

この計算自體は，體積を出して，大司農斛の1斛の體積で割ればいいが，寸法が毫の單位まであって，桁數が多くなり，また V_0 に1441.3寸の概數値を用いるか，1441.279625の精密値を用いるかでも，多少の誤差が生じる。切り捨て（または四捨五入）しないで全桁の計算を示したが，計算結果として大ざっぱな概數しか記載していないので，概算でも結果が同じになり，途中の計算において劉徽がどの桁までの計算を行ったのかを確認することはできない。

b_3・b_4 の文では，『周禮』考工記に記された量器の體積及び1斛の量器の寸法を徽率によって算定する。すなわち，『周禮』考工記には，㮚氏が製作した1鬴の量器の構造を述べて，「深尺，内方尺而圜其外，其實一鬴」（劉徽注は「深一尺，內方一尺，而圓其外，實一鬴」に作る）とある。この量器の形狀について，『周禮』の經文は明言しない。傳存する量器には方形のものと圓形のものがあり，また下がすぼまっているものや楕圓形のものもある。だから，「内方尺而圜其外（内方尺にして其の外に圜（めぐ）らす」の解釋によって，樣々に考えられる。

劉徽も參照したのではないかと思われる鄭玄注の解釋を見れば，次の通りである。

まず，量器の容量である「1鬴」について，

四升曰豆，四豆曰區，四區曰鬴。鬴，六斗四升也。鬴十則鍾。

と述べ，豆，區，鬴，鍾を，升から4倍ずつしていく量の單位とし，1鬴は1升の4の3乘倍，6斗4升に相當するとする。これは，劉徽注 b_4 に引用する『春秋左氏傳』昭公3年の文，すなわち晏子が語る「齊舊四量（齊國で用いた舊來の枡の四量)」に依據する。『周禮』の鬴は，『左傳』の釜である。

全體の體積は，1鬴（6斗4升）の容量が何（立方）寸に相當するのか，量單位の寸法換算率を定めないと決まらない。それについて，『周禮』鄭玄注は，次のように言う。

方尺，積千寸。於今粟米法，少二升八十一分升之二十二。其數必容鬴，此言大方耳。圜其外，爲之脣。

すなわち，『周禮』の經文に「深尺，内方尺」とあるのを，深さ1尺，方1尺の立方體とすれば，「積千寸」すなわち體積は1000（立方）寸になる。ところが，鄭玄は，それを1鬴とはしない。1鬴を1000立方寸として，今（漢代）の粟米法に定める體積換算率（斛法）と比べると，2 22/81升少ない，と言う。「粟米法」の比率を逆算して求めると，1000立方寸が61 59/81（＝64－2 22/81）升ならば，1斛（100升）は1620立方寸になる。

これは，『九章算術』商功章で示された米の斛法と一致し，後で言及する王莽銅斛の銘文が用いる換算率でもある。1斛を1620立方寸とすると，1鬴の値は，その0.64倍，すなわち1036.8立方寸になる。深さ1尺とすると，正方形の1邊は1尺よりも少し大きい値，

1尺1分8釐2毫有奇（$\sqrt{1.0368}=1.01823\cdots\cdots$）となる。そこで，鄭玄は，その量器が必ず1斛の容積を入れたはずだから，端數（0.0182尺）を省略した方1尺の正方形（「大方」）を概數として擧げただけであると注解しているのである。

ここで劉徽注に戻れば，b_4 で『左傳』を引用した後で，「鍾六斛四斗，釜六斗四升，方一尺，深一尺，其積一千寸」と言うのは，鄭玄注の所說と同じである。ところが，鄭玄は，1斛1620立方寸の米斛法を基準にして，1鬴（6斗4升）の體積が1000立方寸よりも多くなることを算定し，方1尺とある記述が概數であると考えたが，劉徽注は逆に1鬴が1000立方寸であることを基準として，容積が1斛となる圓柱形の量器を算定する。

すなわち，b_3 で，『周禮』の量器において，方1尺，深さ1尺の立方體に外接する圓柱形を考える。その圓柱の體積（「圓積」）は，圓徑は $\sqrt{2}$ 尺（10 $\sqrt{2}$ 寸）であるから，その體積を劉徽の公式で計算すれば，

$$(10\sqrt{2})^2\times10\times157\div200=1570\text{立方寸}$$

となる。

b_4 では，劉徽は，鄭玄と同じく1鬴を6斗4升とするが，方1尺，深さ1尺，つまり體積1000立方寸の立方體の容量に合致するとする。そして，それを基準にして，外接する圓柱の容積を計算する。b_3 によれば，直方體にぴったりと外接する圓柱の體積（「通外圓積」）は，1570立方寸であったから，それを量器とすると容積は10斗4合1 3/5龠（1570×64÷1000=100.48升　100升=10斗=1斛　0.48升=4合1 3/5龠，1合=5龠）となる。つまり，1斛よりも少しばかり大きい。そこで，ちょうど1斛となる體積を計算すると，1562.5立方寸（1000×100÷64=1562.5）になる。圓柱の體積V，深さhとすると，圓徑dは，

$$d^2=4V/\pi h$$

であり，V=1562.5立方寸，h=1尺=10寸であるから，$\pi=50/157$ とすると，

$$d^2=31250/157\text{平方寸}=199\ 7/157\text{平方寸}=199044585\ 155/157\text{平方毫}$$

となる。桁數をどこまで取って開方するかによって，多少の誤差を生じるが，劉徽は計算結果として，圓徑の計算結果を直接的に記すのではなく，次のように述べる。

方一尺而圓其外，庣旁一釐七毫，冪一百五十六寸，四分寸之一，深一尺，積一千五百六十二寸半，容十斗。

これは，王莽銅斛の銘文と同じ書式で記したものである。この場合には，立方體に外接する圓よりも小さいから，庣旁は減旁であり，立方體の各頂點（外接圓の圓周）よりも內側に（對角線の交點，すなわち圓の中心に向かって）1釐8毫入ったところにある。對角線（外接圓の直徑）は$10\sqrt{2}$であるから，1尺4寸1分4釐2毫（14.142寸）の近似値を

用いたとすると，圓徑 d＝1尺4寸1分8毫（14.142−0.017×2＝14.108寸）と算定したこととになる。

d＝14.108寸有奇となるのは，199.04の平方根でもいいから，殘念ながらここの場合でも，劉徽の行った計算の精度をはっきりと確かめることはできない。

b_1〜b_4 の劉徽注における內容をまとめると，劉徽が算出したのは，(1)大司農斛（今斛）の體積，(2)（今斛によって計測した）王莽銅斛の容積，(3)『周禮』㮚氏の立方體に外接する圓柱の體積，(4)その容積，(5)1斛となる圓柱形量器の構造（原文「斛之制」，具體的には庣旁の長さ・底面積・深さ・體積）である。

(4)以外の計算には，徽率を用いており，(4)(5)には，1䈀が1000平方寸であることを前提とする。

ところで，前章で考察した劉徽注の b_1・b_2 の文は，『晉書』律曆志上，『隋書』律曆志上にも，「嘉量」「審度」の二カ所で劉徽注としてそれぞれ引用されている。「嘉量」の引用文は，現行本とほとんど同じである。

（『晉書』律曆志上曰，）魏陳留王景元四年，劉徽注九章商功曰，「當今大司農斛，圓徑一尺三寸五分五釐，深一尺，積一千四百四十一寸十分寸之三。王莽銅斛，於今尺爲深九寸五分五釐，徑一尺三寸六分八釐七豪，以徽術計之，於今斛爲容九斗七升四合有奇」。魏斛大而尺長，王莽斛小而尺短也。

（『隋書』律曆志上曰，）魏陳留王景元四年，劉徽注九章商功曰，「當今大司農斛，圓徑一尺三寸五分五釐，深一尺，積一千四百四十一寸十分〔寸〕之三。王莽銅斛，於今尺爲深九寸五分五釐，徑一尺三寸六分八釐七毫。以徽術計之，於今斛爲容九斗七升四合有奇」。魏斛大而尺長，王莽斛小而尺短也。

一方，「審度」の引用文は，多少書き換えられている。

（『晉書』律曆志上曰，）魏景元四年，劉徽注九章云，「王莽時劉歆斛尺，弱於今尺四分五釐。比魏尺，其斛深九寸五分五釐」。卽荀勖所謂「今尺長四分半」是也。

（『隋書』律曆志上曰，）五，魏尺　杜夔所用調律，比晉前尺一尺四分七釐。魏陳留王景元四年，劉徽注九章云，「王莽時劉歆斛尺，弱於今尺四分五釐，比魏尺，其斛深九寸五分五釐」。卽荀勗所云「杜夔尺長於今尺四分半」是也。

すなわち，「王莽銅斛」は「王莽時劉歆斛」に，「於今尺爲深九寸五分五釐」は「弱於今尺四分五釐，比魏尺，其斛深九寸五分五釐」に言い換えられているが，內容的に食い違うわけではない。劉徽注の「今尺」は，王莽時の斛尺で計れば，約1.0471倍（＝1/0.955），すなわち1尺4分7釐1毫の長さになり(7)，律曆志の編者が指摘するように，魏の杜夔が調律に用いた「魏尺」と合致する。また「比魏尺，其斛深九寸五分五釐」は，劉徽注から

の引用文に含まれるように見えるが,「今尺」が「魏尺」になっており,そうでないかもしれない。いずれにせよ,引用者が意を以て改めている痕跡がそこにある。

今掲げた律暦志の記述は,いずれも劉徽が『九章算術』を注釋したのが魏陳留王景元4年(A.D.263)であると記している。そうであれば,今尺として魏尺を用いていることに不都合はない。現行本には,著作年代を知り得る手がかりはないから,他の情報があったと考えるべきである。それが劉徽注を論難している祖沖之の『綴術』である可能性も十分ある。ところが,もしも劉徽注が2箇所で「晉武庫中」にある王莽銅斛に論及していたとすれば,魏末に成立したとすることと明らかに矛盾している。李淳風は,それを知っていて,無視したと言うのであろうか。

しかし,李淳風注の混入とすることを肯んじない學者は,律暦志に引用する注釋 b_1・b_2 の部分を著したのが景元4年であり,その後に晉武庫のなかにあった王莽銅斛に論及した,とする。つまり,劉徽を魏晉の閒の人とするのである。

もっともらしい見解であるように見えるが,内容的な裏付けはない。晉武庫中の王莽銅斛に論及した劉徽注の經文の算術を見れば,商功章の問27・28は,容積から高さや圓周を求めた問23・24・25の還元算である。つまり,魏景元4年に記されたという劉徽注 b_1・b_2 が施された設問である。一方,方田章の圓田術の注釋は,割圓術によって圓周率を算定したところであり,商功章の劉徽注 b_1・b_2 はそこで求めた徽率を用いた圓柱の體積計算をしているのだから,その先後はむしろ逆であるべきである。つまり,内容的な見地に立てば,それらの劉徽注の閒に著述年月の隔たりを感じさせるものは何もないのである。

3　祖沖之の嘉量考

『隋書』律暦志には,劉徽注だけではなく,祖沖之の論考にも言及している。そこに,晉武庫の王莽銅斛を議論したのが祖沖之であるであることの確かな證據がある。そして,劉徽から祖沖之への飛躍を探る手がかりも見いだすことができる。

『隋書』律暦志上,嘉量では,第2章で言及した『周禮』桌氏,『春秋左氏傳』を引用し,さらに「鄭玄以爲方尺積千寸,比九章粟米法少二升,八十一分升之二十二」と述べて,『周禮』鄭玄注に言及した後で,次のように言う。

祖沖之以算術考之,積凡一千五百六十二寸半,方尺而圓其外,減傍一釐八毫,其徑一尺四寸一分四毫七秒〔三〕(原作「二」)忽有奇,而深尺,卽古斛之制也。

『晉書』律暦志上,嘉量でも,同様の議論を展開し,

以算術考之,古斛之積凡一千五百六十二寸半,方尺而圓其外,減傍一釐八豪,其徑一

尺四寸一分四豪七秒〔三〕（原作「二」）忽有奇，而深尺，卽古斛之制也。

とある。祖沖之の名は略されているが，まったく同じ内容である。

これは，1斛となる圓柱の體積を1562.5立方寸とし，それと深さ1尺から減旁と圓徑を算出したものである。つまり，劉徽が商功章の注釋 b_4 で行った計算を，祖沖之が圓周率を密率355/113としてやり直したものである。

『隋書』律暦志上は，さらに『九章算術』商功章の斛法や『孫子算經』の量單位の記載を引用した後で，『漢書律暦志』の斛法に言及する。そして，王莽銅斛の銘文を掲載し，再び祖沖之の數理的考察を記す。

其斛銘曰，「律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九釐五毫，冪百六十二寸，深尺，積一千六百二十寸，容十斗」。祖沖之以圓率考之，此斛當徑一尺四寸三分六釐一毫九秒二忽，庣旁一分九毫有奇，劉歆庣旁少一釐四毫有奇，歆數術不精之所致也。

祖沖之は，王莽銅斛についても，密率355/113を用いた補正計算を行っているのである。すでに論じたように，劉徽は今斛によって計測した王莽銅斛の容積を算出しただけである。王莽銅斛の銘文の數値に對して，具體的な考察を行っているのは，祖沖之なのである。

ところで，『宋書』律暦志下によれば，劉宋の考武帝大明6年（462）に，祖沖之は新暦を上奏し，戴法興に論難される。そこで，戴法興に反駁した發言の中で，

至若立圓舊誤。張衡述而弗改。漢時斛銘。劉歆詭謬其數。此則算氏之劇疵也。……

と述べ，數學者の甚だしい過失として2例を示し，暦學者の甚だしい過失とともに，昔日にその誤りを是正することができたと語る。そこでに擧げている後者の劉歆の例は，明らかに王莽銅斛の銘文のことを指している。前者は，立圓（球）の誤った體積公式について，張衡が考案した新法が正しい公式ではなかったことを言うもので，これも本稿の第4章で考察する事柄である。彼らの數學的誤謬を正したことを自負していることから見れば，おそらく『綴術』に展開された中心的な議論であったのであろう。

それらにおいて批判對象に劉歆の名を擧げるのは，王莽銅斛の構造を考案した人物とされるからである。すなわち，『漢書』律暦志によれば，王莽は，新王朝を建國した際に，度量衡の統一を目的として天下の鐘律に通じている者百餘人を徵集し，大司農（羲和）の劉歆を中心として法度を定めさせ，實際に標準器を作成して，天下に頒布した。

掲載する銘文は，晉武庫中の王莽銅斛に言及した『九章算術』商功章の注釋の記載と比べると，「方一尺」「深一尺」の「一尺」が「尺」に，「冪一百六十二寸」が「冪百六十二寸」になっているが，内容的な差異はない。商功章の注釋では，さらに，銅斛の底部にある斗銘（1斗の量器の銘文）を掲載し，升・合・龠の量器にも銘文が皆な同様の銘文

があり，背面に讚文（後銘）が記されていたことを述べる。

王莽銅斛は，周知の通り清末に坤甯宮に所藏されていたものが傳存するが（臺灣故舊博物館現藏），その注釋通りに，５量それぞれの銘文があり，壁面には81字の讚文が刻まれている。王國維は，「新莽嘉量跋」（『觀堂集林』卷19）において，傳存した王莽銅斛に言及した後に，商功章末尾の劉徽注を李淳風注とし，

> 晉武庫中，有漢時王莽所作銅斛。……〔升〕（王國維の校勘に從う）・合・龠皆有文字。升居斛旁，合・龠在斛耳上。後有讚文。與今律曆志同，亦魏晉所常用。今粗疏王莽銅斛文字尺寸分數，然不盡得升合勺之文字。

とある商功章の記述を次のように解釋する。すなわち，「與今律曆志同」とあるのは，その後銘が李淳風の撰する所の『隋書』律曆志中に揭載された王莽銅斛の銘文と同じであることとし，「今粗疏……」の「粗」は「祖」の誤りで，祖沖之を指し，彼が密率によってその量器の構造を考究したが，升・合・龠の三銘については記錄していないことを述べたものであるとする。また，「升居斛旁，合龠在斛耳上」という記載は，旁と耳が區別されているようであるが，現存のする量器には同じ高さの左右の耳があるだけであり，李淳風が實物を見ていないと指摘する。それが，妥當な解釋であることは，贅言を要しないだろう。劉徽注說を主張する學者は，この見解に耳を傾けようとせず，このわずかなコメントに，銅斛發見に湧き立つ劉徽のどのような加筆メッセージを讀みとるというのであろうか。

晉代の武器庫に所藏された王莽銅斛と祖沖之の關わりも十分に證明できる。すなわち，『隋書』律曆志上には，晉の武帝泰始９年（273）から翌年にかけて，中書監の荀勖が魏尺が４分半ほど長すぎるとし，『周禮』に依據して周尺（實は王莽時代の尺度とされる）(8)に戻そうとしたことを記載する。そして，周尺の流れを汲むものとして，晉泰始十年荀勖律尺とともに，漢志王莽時劉歆銅斛尺，後漢建武銅尺，さらに祖沖之所傳銅尺の４つを擧げる。また後文には，梁武帝の『鍾律緯』が引く祖沖之所傳銅尺の銘文に言及しているが，その銘文は晉泰始十年荀勗律尺とまったく同じものである。しかも，銘文には，荀勖が尺度の校定に用いた古法の７品の一つに「銅斛」が明記されている。だから，荀勖が晉前尺を制定する際に用いた王莽銅斛を，祖沖之が議論していた可能性は十分にある。李淳風注が「晉武庫中王莽時銅斛」の銘文を引いて行っている計算が，祖沖之の數理計算と類似していることを勘案すれば，それも前後の論述と同樣に祖沖之の『綴術』に依據したものであるとしても，不自然さはないだろう。

これまでの考察で，劉徽注が李淳風注の混入であるとするだけの證據は，十分に揃っているように思われる。從來の研究が李潢や王國維の考察に異を唱えてまったく逆の結論を主張してきたので，祖沖之が行った銅斛考に對してなおざりな評價しか下していない。そ

こで，數理的な見地からの私見を述べておきたい。

祖沖之の行った2つの計算は，體積Vと深さhから圓徑dを出し，庣旁αを定めたものである。

まず，『周禮』における古斛については，$d^2=4V/\pi h$ において，劉徽注 b_4 がすでに求めたように，6斛4斗が1000立方寸として，V=1562.5立方寸とする。h=1尺=10寸，π≒355/113を代入とすると，

d^2=14125/71平方寸=198 67/71平方寸=1989436619718 22/71平方忽……(1)

となり，

d=1410473.8……（1尺4寸1分4毫7秒3忽有奇）

α=（1414213−1410473）/2=1870（1釐8毫7秒≒1釐8毫有奇）

となる。

王莽銅斛の場合には，$d^2=4V/\pi h$ において，銘文に記されている數値によってV=1620立方寸，h=1尺=10寸となる。π=355/113を代入すると，

d^2=73224/355平方寸=206 94/355平方寸=2062647887323 67/71平方忽……(2)

d=1436192.1……（1尺4寸3分6釐1毫9秒2忽有奇）

α=(1436192−1414213)/2=10989.5（1分9毫8秒9忽有奇≒1分9毫有奇）

となる。

上に掲げた d^2 は，桁數を平方忽まで記したが，實際にそこまで求めたかはわからない。『周禮』の古斛において，2書とも原文では圓徑の下1桁が「二忽」となっているので，端數を切り捨て，上から何桁までかの概數を取って計算したかのようである。ところが，開方して d=1410472忽有奇という結果を得るには，1410472忽≦d<1410473忽，すなわち $1989431262784 \leqq d^2 < 1989434083729$ の範圍になければならない。(1)式において，上位7桁までの概數（d^2=1989436000000）を取ったとしても d=1410473忽有奇になる。また，上位6桁までの概數（d^2=1989430000000）だと d=1410471有奇になってしまう。「有奇」という表記が示すように，端數切り捨てが通常のやり方であるが，四捨五入だとしても，その範圍に入る場合はないから，原文のように d=1410472忽有奇となることはありえない。

(2)式の王莽銅斛の場合を見ると，1尺4寸3分6釐1毫9秒2忽有奇という結果を正しく得ているから，少なくとも上8桁までは計算したことが確認できる。だから，明らかに「二忽」は「三忽」に訂正すべきである。

劉徽と祖沖之の計算内容を比較すると，劉徽が「毫」までしか求めていないのに，祖沖之は「忽」まで算出していることに氣づく。劉徽が圓徑を「忽」まで計算していなかった

ことを確かめておこう。

商功章の劉徽注 b_4 において，劉徽は圓徑 $d=14.108$ 寸有奇を算出したが，それを得る d^2 の最小の概數は，199.04平方寸であった。その平方根は14.10815寸（1尺4寸1分8毫1秒5忽有奇）であり，朓旁 $\alpha=(1414213-1410815)/2=1699$（1釐6毫9秒9忽）となる。桁數を増やせば，199.04平方寸より大きくなるので，開方して得られる圓徑は大きくなり，朓旁は逆に小さくなる。つまり，必ず1釐7毫未滿となるから，劉徽が祖沖之と同様に圓徑を忽單位まで計算して朓旁を算定したとするならば，「朓旁一釐七毫」ではなく，「朓旁一釐六毫有奇」と記したはずである。

『九章算術』の注釋では，本稿で李淳風注であることを論證しようとしている圓田術の計算が，「忽」を最小單位としている唯一の例であって，それ以外では「毫」より微小な單位は見られない。「忽」という長さの單位が見られるのは，『孫子算經』が最初である。すなわち，巻上の冒頭に，度量衡の單位を論じて，

度之所起，起於忽，欲知其忽，蠶吐絲爲忽，十忽爲絲，十絲爲一毫，……

とある。『孫子算經』は，4世紀頃の成立とされるから，まさに劉徽注と祖沖之の間にある。「絲」は，『隋書』律暦志下び『九章算術』の李籍音義が引く同書では，「秒」に作る。

ついでに言えば，長さだけではなく，容量の單位においても，『漢書』律暦志では，1200粟が1龠，2龠を1合とするが，『孫子算經』では，

量之所起，起於粟，六粟爲一圭，十圭爲一撮，一撮爲一抄，一抄爲一勺，十勺爲一合，……

となっていて，10勺を1合とし，さらに微小な單位を記載する。

劉徽は，商功章の b_4 において「十斗四合一龠，五分龠之三」という計算結果を記しているが，これは『漢書』律暦志と同じ2龠＝1合の單位を用いている。ところが，晉武庫中の王莽銅斛に言及した商功章の問28の注釋に，

今粗疏王莽銅斛文字尺寸分數，然不盡得升合勺之文字。

とあり，升・合・勺という單位を用いている。王莽銅斛の5量の1つだから「勺」は「龠（＝1/2合)」でなければならない。しかし，唐代には，『孫子算經』に由來する度量衡を通用していたから，李淳風はうっかりと「勺（＝1/10合)」を誤用してしまったのである。

つまり，誰もが見逃していたことであるが，「忽」「勺」を用いていることを，それらの劉徽注が李淳風注の混入であることの決定的な證據として提示しておきたい。そのことは，劉徽と祖沖之の補正計算の相違は，單に用いた圓周率が異なるだけではなく，微小單位の處理法にも存在することを明らかにしている。それが，あえて遠回りしてきた本稿の考察で浮かび上がった最も注目すべき點である。

4 王莽銅斛と張衡の圓周率

以上の考察で，『九章算術』劉徽注に祖沖之に依據した李淳風注が混入していることを論證しながら，それぞれの數理的な考察を行った。ここでようやく圓周率の算定法を議論し，王莽銅斛から劉徽，劉徽から祖沖之への理論的な飛躍が何であったのかを檢討する準備が整った。

ところで，これまで圓周率という言葉を，廣義に使ってきた。もう少し嚴密に言えば(9)，圓周率とは，圓の直徑 d と圓周 C の間に成立する比例關係，すなわち，

$$C=k_1d$$

において，その比例定數 k_1 を指す。また，圓の面積 S は，それに外接する正方形（「外方」）の面積 d^2 に比例する。同じ直徑の球の體積 V は，それに外接する立方體の體積 d^3 に比例する。

$$S=k_2d^2$$

$$V=k_3d^3$$

k_1 と k_2, k_3 には，

$$k_1=4k_2=6k_3\,(=\pi)$$

という關係が成立するが，『九章算術』の段階では，$k_1=4k_2$ は正しく認識しているが，$k_1=6k_3$ と考えたわけではなかった。

說明的に言えば，圓の面積は，半徑と半周を２邊とする正方形の面積に等しいと考えた。

$$V=d/2\times C/2=dC/4$$

そして，$k_1=3$，劉徽注の用語で記せば「周三徑一の率」あるいは「(圓) 周率三，徑率一」とし，

$$V=3/4\ d^2$$

の式を得て，$k_2=k_1/4=3/4$ の比例定數を定めた。すると，圓と外接正方形の面積比は，3：4（「圓率三，方率四」）となり，圓の面積（「圓冪」）は外接正方形（「方冪」）の４分の３に置換できる。なお，k_3 については，張衡の圓周率を論じたところで述べる。

さて，劉徽や祖沖之が圓周率を算定する前に，$\pi=3$ の修正値がすでに存在した。その最初と見なされたのは，王莽銅斛の圓周率である。その圓周率は，はっきり示されているわけではない。銘文の「方尺而圓其外，庣旁九釐五毫，冪百六十二寸」から逆算した推定したものであるが，祖沖之の求めた眞値よりも少し大きい。その圓周率とは，面積から圓

徑を求めたのであるから，先の定義で言えば，k_2 の値である。

王莽銅斛の構造は，1斛の體積が1620立方寸，深さが1尺というのが，最初に設定されているから，底面積Sはちょうど162平方寸（=162000000平方毫）であり，端數切り捨ての近似値ではない。一方，圓徑dは，方1尺の內接正方形の對角線 $\sqrt{2}$ 尺を1.4142尺=14142毫で近似したとすると，それに庣旁 α の2倍を加えれば求められる。銘文によれば，α=9釐5毫=95毫であるが，ここには小數點以下に切り捨てがあるかもしれない（つまり「庣旁九釐五毫有奇」）。だから，α=9釐5毫となる圓徑dの範圍は，

$(14142+95\times 2)^2 \leqq d < (14142+96\times 2)^2$，すなわち $14332^2 \leqq d < 14334^2$

$\pi = 4S/d^2$ にそれらの數値を代入すると

$\pi\,\mathrm{max} = 648000000/14332^2 = 648000000/205406224 = 3.1547242\cdots\cdots$

$\pi\,\mathrm{min} = 648000000/14334^2 = 648000000/205463556 = 3.1538439\cdots\cdots$

となるから，π の（小數點第5位までの）範圍は，

$3.153844 \leqq \pi \leqq 3.154724$

となる。

圓周率を算定していたとするならば，m/n（m, n は正整數）という分數値で表記されたはずである。そこで，分母が2桁以下であったと假定すると（$1 \leqq n \leqq 99$），この範圍にある分數は，41/13（≒3.153846）と306/97（≒3.154639）しかない。

その分數値は，王莽銅斛の數理的な算定法を推察するのに，有益な手がかりを與えているように思われる。しかし，ここで議論している劉徽や祖沖之がその分數値を，劉歆の新率と考えたわけではない。また，當時の度量衡關連の出土物を含めて總合的に考察すべきであるから，別の機會に論じることにする。

ところで，王莽から劉徽までの閒に，新率を唱えた人物に後漢の張衡がいる。張衡の算定した圓周率は，2つある。

1つは，『靈憲』（『開元占經』卷1所引）に，

（日月の）直徑の長さは，天の周圍の736分の1，地の廣さの243分の1に當たる。（『開元占經』卷1所引による）

とあり，渾天說で天の周圍を圓周，地の廣さを直徑としたとすると，その比率，すなわち $k_1 = 736/232 = 92/29 = 3.172413\cdots\cdots$ となる。

k_1 の修正値としては，劉徽と同時代に生きた吳の王蕃も新率を唱えた。『宋書』天文志1によれば，「周百四十二，徑四十五」の率を主張したが，これは王莽銅斛の數値に近く，$k_1 = 142/45 = 3.1555\cdots\cdots$ である。張衡や王蕃の算定法は不詳であるが，ともに渾天儀を制作している點が注目される。渾天儀の圓徑と直徑とを實測した結果に定めた圓周率で

あるかもしれない。

王蕃は，古えの渾天儀（「渾象」）が2分を1度，全周が7尺3寸半分であり，張衡はそれを4度を1分，全周を4尺6寸に改めたが，前者は小さすぎて星辰が過密になり，後者は大きすぎて回轉させるのが困難であるとして，3分を1度，全周を1丈9寸5分4分の3とした，と語っていることに，その形跡が感じられなくはない。

中國の場合には，1日に1度，1年で1周天であるから，古くは365 1/4度であった。王蕃の場合には，渾天儀を制作するのに劉洪の乾象曆に依據したと言うから，周天度數365 145/589を用いた。そこで，1度を3分とし，圓周率を142/45とすると，圓周Cと直徑dは，

$$C=3\times 365\ 145/589=1095\ 435/589\ (\text{分})$$

$$d=C\div 142/45=347\ 142/589\ (\text{分})$$

となる。この直徑は，眞の理論値よりも，約1分半以上短いので，制作した渾天儀と測定がどんなに正確でも，精度に限界のあることを明らかにするとともに，測定値に數的な操作がある可能性を示唆する。

そこで，この式を變形すると，

$$C=(101/589)\times 45\times 142$$

$$d=(101/589)\times 45\times 45$$

となり，乾象曆の定數である589，101及び周率142，徑率45の積になる。これは，365 145/589=215130/589=101×15×142/589であることによる。あくまで憶測にすぎないが，測地値の微小部分を數値化する際に，周天度數等の定數を用いた數的操作をして定めたとすれば，そこに數的な美しさを感じているのかもしれない。

張衡の唱えたもう1つの圓周率は，球の體積，すなわち k_3 に關わるものである。『九章算術』卷4，少廣章では，球（「立圓」，劉徽注では「丸」）の體積から直徑を求める開立圓術を論じる。そこでは，球の體積は，

$$V=9/16\ d^3$$

という式を用いる。劉徽は，この公式が正しくないことを論證したが，同時に張衡が主張した，

$$V=5/8\ d^3$$

という新説も批判している。

この場合には，もしも $k_1=6k_3$ の關係を正しく認識していたとすると，用いた圓周率は，27/8，15/4となるが，實際にはそうではない。劉徽が指摘するように，これらの式は，圓と外接正方形の面積比の自乘を比例定數（$k_3=k_2^2$）としたものである。球を水平に

切ると，その斷面は必ず圓になり，垂直に切っても同樣である。立方體を k_2 倍すれば，水平の斷面が圓となる立體，すなわち圓柱（「圓囷」）の體積になることは，もちろん知っていた。そこで，球は水平方向だけではなく，垂直方向にも斷面が圓となるなら，さらに圓柱を k_2 倍すれば，球の體積となる，と考えたのである[10]。

『九章算術』では，$k_2=3/4$ であるから，$k_3=9/16$ となる。劉徽注によれば，張衡は，k_2，k_3 の比例定數を，それぞれ「方八之面，圓五之面」，「質六十四之面，渾二十五之面」と論じた。前者は，外接正方形と圓の面積比である方率，圓率の値である。「八之面」とあるのは，面積（「冪」）が「八」となる正方形の１邊（「面」）のことであり，８を開方した數，今日の $\sqrt{8}$ と同義である。「質」とは球に外接する立方體，「渾」とは球のことである。兩者の體積比を，平方根を開いて「質率八，渾率五」とせず，方率，圓率を自乘した形のままに記しているから，『九章算術』と同じように $k_3=k_2^2$ と考えていたことは確實である。

$k_2=\sqrt{5}/\sqrt{8}=\sqrt{10}/4$ なら，劉徽注がすでに指摘するように，圓周率は $\sqrt{10}$ としていることになる。$\sqrt{10}$ は，インド數學ではよく知られた圓周率である。だから，張衡が圓周率（k_1）を $\sqrt{10}$ とし，あるいは方率，圓率（k_2）を定めてから，球の體積公式を修正したのかもしれない。しかし，上述のように『靈憲』では，k_1 に別の値を用いているから，その逆の可能性もある。

なぜならば，張衡は，球に外接する立方體（「外立方」）とそれに外接する球を考え，內外の２つの球の體積比（「二渾相與之率」）を算出しているからである。これは，內側の球に內接する立方體（中立方）を考えて，內外の２つの立方體の體積比（「二質相與之率」）に置換すれば，劉徽が內接立方體の１邊を５尺として注解しているように，三平方の定理を用いて容易に求められる。最終的な結果だけを記すと，外渾の體積：內渾の體積$=3\sqrt{3}:1$ となる。張衡の求めた計算では，$\sqrt{675}:\sqrt{25}$ とし，さらに $\sqrt{675}\fallingdotseq\sqrt{676}=26$ と近似して，外渾の體積：內渾の體積$=26:5$（「外渾積二十六，內渾積五」）とする。巧妙な近似計算の工夫であるが，わざわざ整數比を求めたのは，「質積八，渾積五」との對比を考えた，つまり k_3 を定めてから k_2 を算出したからであると，するほうが妥當であるかもしれない。

ところで，劉徽は，立方體に內接する圓柱の體積をさらに k_2 倍するだけでは，實は球の體積にならないことを正しく認識した。すなわち，立方體を縱に圓筒で貫いてそれに內接する圓柱にした後で，橫からも圓筒で貫くと，正面や側面から見ると圓で，上から見ると正方形（水平に切ってできる斷面）になる奇妙な立體ができる。その正方形にぴったりと內接する圓の集合體が球である。そこで，劉徽はそれを「牟合方蓋」と呼ぶ。そして，球の體積を圓率として求めるならば，圓柱ではなく，「牟合方蓋」の體積を方率とすべき

であると論證する。言い換えれば，球の體積になるのは「牟合方蓋」の體積の k_2 倍であるから，圓柱の體積を k_2 倍しただけの『九章算術』及び張衡の體積公式は誤りであることを證明したのである。

もっとも，劉徽は誤りに氣づいたものの，結局は球の體積公式を算定することはできなかった。「牟合方蓋」の體積がはっきりとわからなかったのである。「牟合方蓋」の水平斷面を考えれば，外接する立方體の2/3倍になっていることに氣づくだろう。その$k_2(=\pi/4)$倍が球の體積であるから，$V=\pi/6\ d^3$ となる(11)。これは，數學的に正しい公式であり，しかも $k_1=4k_2=6k_3$ という關係も理解できたことになる。

その公式を求めたのは，實は祖沖之である。李淳風注では，祖沖之の息子の祖暅之による「開立圓術」の論證を掲載しているが，第3章で引用した戴法興への反論で，張衡の立圓の誤りを正したと語っているので，祖沖之自身がすでに發見していたものと考えられる。『綴術』には，息子の補足的な注記が存在したのかもしれないが，不詳である。

なお，祖暅之が著わした『渾天論』の中には，張衡『靈憲』の圓周率について，「其の率，周多く徑少なきに傷(やぶ)る，（張）衡の疎なり」という批判が見られる。これも，父の教えを祖述したものであろう。

劉徽注の議論を基盤にして，張衡の2つの圓周率を正面から論駁しているところに，かえって祖沖之・暅之が張衡の數學的成果を積極的に吸收し，發展させたことを窺うことができるだろう。そのように考えれば，數學的な手法をはっきりと用いている張衡の圓周率算定は，$\pi=3$ の古率が粗略であることを初めて示した王莽銅斛よりも以上に，劉徽，祖沖之に數理的アプローチの契機を與えたと評すべきであるように思われる。

5 劉徽から祖沖之へ

劉徽や祖沖之が圓周率の算定で試みたのは，アルキメデスのように正多角形の圓周の長さCを求めたのではなく，圓に內接する正多角形の細分割によって圓の面積を算出し，外接正方形との面積比「圓率三，方率四」を是正しようとしたものである。端的に言えば，k_2 の算定であった。$k_2=a/b$，すなわち「圓率 a，方率 b」とすると，$k_1=4k_2=4a/b$ で，「周率 4a，徑率 b」となる。

劉徽が徽率を算定したのは，割圓術と呼ばれる方法である(12)。劉徽注の記すところによれば，圓に內接する正6角形の1邊に圓の半徑をかけ，3倍すると，正6角形を分割した正12角形の面積になり，正12角形の1邊の長さを算出して，同様に半徑をかけ，6倍すると，正24角形の面積になる，というようにして，正6角形を次々と分割し，その正多角形

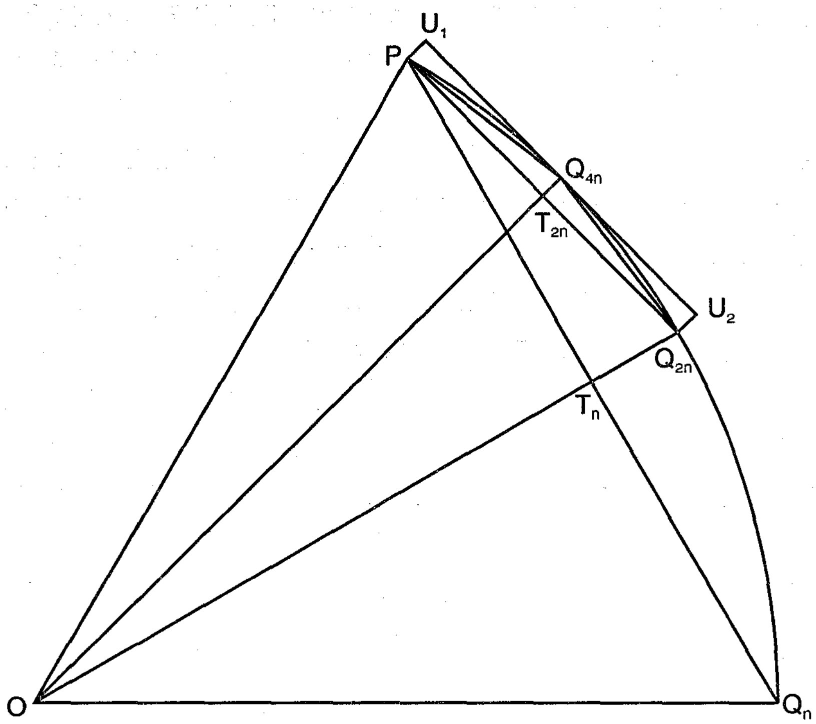

圖1　割圓術の圖解

の面積を求めていけば，やがて圓の面積に等しくなると考えた。

圖1を用いて說明すると，內接正n角形（nは6の倍數）の1邊 PQ_n の長さが既知であると，內接正 2n 角形の1邊 PQ_{2n} の長さは，半徑 r（=OP）を1邊とする直角3角形に着目して，3平方の定理を2回用いれば，下式で算出できる。

直角三角形 POT_n において，$PQ_n=a_n$，$OT_n=b_n$ とすると，

$$b_n=\sqrt{r^2-a_n^2/4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

直角三角形 PT_nQ_{2n} において，$PQ_{2n}=a_{2n}$，$T_nQ_{2n}=c_n$ とすると，

$$c_n=r-b_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_{2n}=\sqrt{c_n^2+a_n^2/4} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる。a_{2n} に半徑 r をかけると，$\square POQ_{2n}Q_{4n}$（ただし $PQ_{4n}=Q_{4n}Q_{2n}$）の2倍の面積，$\triangle POQ_{4n}$ の4倍の面積となる。PQ_{4n} は，正 4n 角形の1邊であるから，正 4n 角形の面積 S_{4n} は，$\triangle POQ_{4n}$ の面積を邊數倍（4n 倍）したものである。だから，

$$S_{4n}=(a_{2n}\times r\div 4)\times 4n=nra_{2n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

となる。

限りなく細分割して a_n を小さくしていけば，圓と「體を合し」，「餘徑」すなわち T_n

Q_{2n}（$=c_n$）はなくなり，內接正多角形の面積は圓の面積に等しくなると考えた。つまり，劉徽は，無限分割という數學的概念をはっきり認識しているのである。

劉徽の割圓術の注目すべきところは，それだけではない。「餘徑」に着目して，圓の面積の範圍が限定できることを指摘した。

すなわち，內接正 2n 角形の「餘徑」は，$T_{2n}Q_{4n}$（邊 PQ_{2n} の中點 T_{2n} と圓弧との距離）である。その長さ c_{2n} に邊長 a_{2n} をかけると，點 Q_{4n} の接線を１邊とする$\square PQ_{2n}U_2U_1$ の面積が得られる。それは，內接正 4n 角形の $\square POQ_{2n}Q_{4n}$ と內接 2n 角形の $\triangle POQ_{2n}$ の面積の差を２倍したものである。それに $\triangle POQ_{2n}$ の面積を加えれば，扇形 POQ_{2n} の面積よりも，圓弧の外側にはみ出た分だけ大きくなる。

圓全體について考えると，內接正 4n 角形と內接 2n 角形の全體の面積の差（「差冪」）を２倍し，內接 2n 角形の面積を加えたものは，圓の面積よりも大きくなる。(4)式までの時點では，正 2n 角形の餘徑はまだ算出していないが，內接正 4n 角形と內接 2n 角形の面積は求めることができるから，それらの差冪によって，圓の面積Sは次のような範圍にあるとすることができる。

$$S_{4n} < S < S_{2n} + 2(S_{4n} - S_{2n}) = S_{4n} + (S_{4n} - S_{2n}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

つまり，１邊が半徑と等しくなる內接正６角形から出發して，內接ｎ角形の１邊まで算出した場合には，(1)〜(4)の式によって，內接正 2n 角形の１邊の長さと內接正 4n 角形の面積が算出でき，その差冪から圓の面積Sは(5)式の範圍になる。

劉徽注には，割圓術の考え方が示されているだけで，徽率を算定した過程は何も記されているわけではない。(5)式についても，算式が明記されているわけではなく，考え方だけが述べられているだけである。ただし，李淳風の用いたテキストには，劉徽の圖解があったと思われる。「謹按」以下において，その圖を參照しながら圓徑２尺として計算している。だから，劉徽が徽率を算定したのは，圓徑２尺，つまり正６角形の邊長を１尺として分割していったと考えていいだろう。

そこで，$r = a_6 = 1$ 尺を初期値として，分割を幾度も繰り返せば，精密なSの値が得られ，圓周率（先の定義に從えば k_2）の値を定めることができるはずである。しかし，實際に計算を行ってみると，餘徑がなくなる前に，割り算や開方の近似計算の誤差が無視できなくなり，それ以上分割しても圓に近づけなくなる。

上式(1)〜(4)に從って，割圓術の計算を行おうとすると，b_n を算出する(1)式の開方計算をどのように近似するかによって，計算の精度が決まってくる。(2)式で b_n から求めた c_n を自乘するから，何度か繰り返せば，大きな誤差になる。

割圓術の精度の問題は，「謹按」以下を劉徽注と誤解したこともあって，これまであま

り議論されていない。しかし，劉徽から祖沖之への圓周率の精密化は，そこに最大の論點がある。彼らの算定法を具體的に推察するには，「謹按」以下が祖沖之に依據した李淳風注の試算であることを前提として，數理的な分析を試みるべきである。

開方計算のやり方は，『九章算術』巻4，少廣章で示されている。その劉徽注には，開ききれない場合の近似法として，

$\sqrt{a^2+r} \fallingdotseq a+r/2a$ 又は $\fallingdotseq a+r/(2a+1)$

があるが，「近似値（「粗」）であって（眞値に）近いといっても，用いることができない」とする。實際に，分母の數値が大きくなると，計算はきわめてややこしくなる。そこで，開ききれない場合でも，開方を續け，單位のない無名數になっても，1/10，1/100……とさらに桁數を繰り下げていけば，開ききれない餘り（「朱冪」）があっても，言うに足りないくらいの數なので切り捨てることができると言う。分數による端數表記であるが，明らかに今日の小數計算に近い考え方がここにある。

李淳風注の開方計算は，この劉徽注の方式を用いている。すなわち，(1)式では，1/10忽まで求め，「餘分」は切り捨てている。(3)式については，最終的に得られる內接正多角形の1邊については，忽までしか出していない。ただし，さらに分割して(1)式に代入する時には，(3)の開方値を再び自乘するのではなく，面冪 a_{2n} の値をそのまま用いる工夫をしている。それ以外の近似計算としては，c_n^2 と $a_n^2/4$ について，忽まで求め，小數點以下は「餘分」として切り捨てる。それらに端數があっても，桁數が十分に大きいと，開方計算の切り捨て分のほうが大きいから，ほとんど誤差とはならない。

そのような切り捨て計算をすれば，b_n は眞値よりもやや小さくなり，c_n はやや大きくなる。$a_n/4$ や c_n^2 の切り捨て分があって，少し補正されるが，求めた正多角形の面冪 a_{2n} は，眞値よりも少し大き目になる。しかし，(4)式で求める正多角形の1邊の長さがきわめて小さくなっていくと，餘徑がなくなる前に，邊長の桁數が不足してくるので，切り捨ての誤差が無視できなくなる。そして，眞値よりも逆に小さくなり，それ以上細分化しても意味がなくなってしまう。餘徑がなくなるまで計算すればいいとは言うものの，それよりずっと前に桁數が足らなくなってオーバーフローしてしまうのである。それを解消するには，桁數を增やしていくしかない。

實際の數値を掲げて説明するのが，わかりやすいだろう。李淳風注では，正6角形の分割に始まって，正48角形を分割して正96角形とし，その1邊及び正192角形の面積を算出するところまでは，具體的な數値が示されている[13]。原文と對應させれば，$a_n^2/4$ は「句冪」及び「小股」の冪，b_n は「股」，c_n は「小句」，a_{2n} は「小弦」の「冪」である。

正96角形の1邊まで計算すれば，徽率が得られる（表1參照）。その場合には，差冪は，

表1　李淳風の圓周率算定（圓徑＝2尺＝2000000忽）

n	c_n	a_{2n}^2	a_{2n}	$S_{4n}(100\pi)$	a_{2n}'	S_{4n}' (100π)
	忽	平方忽	忽	平方寸	忽	平方寸
6	133974.6	267949193445	517638	310.5828	517638.0	310.58280
12	34074.2	68148349466	261052	313.2624	261052.3	313.26276
24	8555.2	17110278813	130806	313.9344	130806.2	313.93488
48	2141.1	4282144012	65438	314.1024	65438.1	314.10288
96	535.5	1070825263	32723	314.1408	32723.4	314.14464
192	133.9	267724244	16362	314.1504	16362.2	314.15424
384	33.5	66932183	8181	314.1504	8181.2	314.15808
768	8.4	16733115	4090	314.1120	4090.6	314.15808
1536	2.1	4183282	2045	314.1120	2045.3	314.15808

$S_{192}-S_{96}=314.1024-313.9344=314\ 64/625-313\ 584/625=105/625$（平方寸）

となる。(5)式で示せば，

$314.1024(=314\ 64/625)<S<314.2704(=314\ 169/625)$

となる。なお，直徑が2尺だから，$S=100\pi$ である。

李淳風注は，徽率が眞値よりも小さいことを確認する。王莽銅斛に言及するのは，ここにおいてである。銘文を引用した後で，

以此術求之，得冪一百六十一寸有奇。其數相近矣。此術微少，……

と述べる。「此術」というのは，徽術を指す。庣旁95毫から圓徑14.332寸を出し，徽率を用いた圓の面積を求める公式「徑自乘，以一百五十七乘之，二百而一」に代入すると，

$(14.322)^2\times157\div200=161.01895194$

となり，銅斛の底面積（「冪」）は161（平方）寸有奇を得る。銘文に記載する數値162（平方）寸と比べると，やや少ない。それは，徽率が差冪のある分だけ眞値よりも「微少」であるからであるとし，さらに精密な値を算出する。

すなわち，王莽銅斛の記載のほうが徽術による算出値よりも正確であることを前提にした議論である。圓周率の眞値よりも少し大きい祖沖之の約率を「密率」としている李淳風にとっては，徽率よりも王莽銅斛の圓周率のほうが眞値に近いと考えたようである。もちろん，祖沖之が王莽銅斛の記載に誤謬があることを明らかにしたのは知っているのであるから，議論を正當化するために論據としているだけであり，それから眞値を定めようというのではない。

この李淳風注を劉徽の加筆部分とする者の立場に立てば，晉代になって王莽銅斛の銘文を知り，それまでに求めていた徽率が間違いである衝撃的な事實を悟ったことになる。そして，さらなる密率を算出したが，それまでの徽率による修正値は訂正しないままにしておいた，ということになる。李淳風注を劉徽注と見なすことで，圓周率に關する劉徽の業

績を高めているようで，かえって貶めてしまっているである。

さて，正96角形さらに分割すれば，差羃は小さくなるが。李淳風注は，その計算を續行した結果を記さずに，正192角形の面積に36/625を加えた314 100/625＝314 4/25(＝314.16)が，求める面積Sであるとする。そして，末尾に，

當求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之冪，而裁其微分，數亦宜然，重其驗耳。

と述べる。この記述通りに讀めば，768角形を分割して1536角形の１邊を求め，正3072角形の面積を算出することができ，それで「微分（加算分の36/625)」を決定して，そのような數になると言っているかのようである。

ところが，正96角形以降の分割を實際に行ってみると，表１に示すように，正3072角形の面積は，正1536角形よりも小さくなってしまう。これは，１邊が約４釐９秒有奇と小さくなり，逆に邊數が大きくなると，切り捨ての誤差が無視できなくなるからである。有效な計算は，差羃が求められている $n=192$ の分割までである。$S_{384}=314.1408=314\ 88/625$, $S_{768}=314.1504=314\ 94/625$ を(5)式に代入すると，

$314.504(=314\ 94/625)<S<314.1516(=314\ 4/25)$

となる。この場合には，314 4/25という値は上限で得られるから，それを收束値としたことに不自然さを感じるかもしれない。しかし，開方による端數切り捨てに留意していたとするならば，314 4/25 有奇であることくらいはすぐに理解できたはずである。あるいは，(3)式で正多角形の１邊 a_{2n} を求める開方計算を，(1)と同様に1/10忽まで求めようとしたかもしれない。そこで，表１の a_{2n} を小數點第１位まで求めたものに修正すると（表１の a_{2n}'），$n=384$ までが有效で，$S_{768}'=314.15424$, $S_{1536}'=314.15808$ であるから，

$314.15808<S<314.16189$

となる。

ここでもし徽率の算定値である $S_{192}=314\ 64/625$ を補正しようとして，加えるべき「微分」に625の分母とする數値を，その範圍において選ぼうとするならば，候補は35/625, 36/625, 37/625しかない。もちろん，李淳風は，祖沖之の得た數値の範圍，

$3.1415926<\pi<3.1415927$

も知っていたのであるから，それに最も近くなる36/625が妥當であると裁定したにちがいない。

正3072角形の面積について論ずれば，$a_{1536}{}^2=1673311.56$, 餘分を切り捨てて開方すると，$a_{1536}=4090.613\cdots\cdots$ となる[12]。小數點以下を切り捨てると，$S_{3072}=314.1120$となって，分割する前よりも小さくなる。小數點第１位までを有效とすると，$S_{3072}=314.15808$ とな

り，S_{1536}と同じになって，差羃がなくなり，いずれもオーバーフローする。さらに1つ桁を下げると，$S_{3072}=314.1590784$が得られ，少し大きな値になる。餘分を切り捨てず，最大限桁數を最大限に増やしたとしても，$S_{3072}=314.590863$……くらいしかならない。だから，314.16に收束するとしたのは，正3072角形の面積を算出して定めたのではなく，あくまで推測にすぎない。

李淳風が實際に上記の計算を行ったとしたら，正3072角形の面積に至るまでにオーバーフローしてしまう限界性に氣づき，祖沖之の算出した密率に到達しようとするならば，桁數をもっと大きくする必要があることを正しく認識したはずである。そうすれば，正3072角形の面積をさらに正確に求めることができ，さらに分割していくことで，より精密な値（密率）が得られるにちがいない。末尾の「當求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之羃……」は，そういうことを含意した發言であったと考えるべきであろう。

李淳風注が中途半端な計算結果しか示すことができず，少し大きめの近似値を曖昧に揭げたのは，314 4/25よりも大きい圓周率である約率を「密率」とし，もっと大きい圓周率を用いている王莽銅斛の銘文を基準にして徽率が微小であることを論證しようとしたことと通じるものがある。そこに，祖沖之の論説に依據しながら，密率と約率を混同してしまう李淳風の理解不足を認めるべきであろう。「學官は其の深奧を究むること能う莫し」という『綴術』についての評語は，祖沖之の數理的考察を子細にまで理解できなかった，彼自身の率直な感想を告白したものと見たほうがいいのかもしれない。

劉徽の場合には，すでに指摘したように，李淳風注のように「忽」ではなく，「毫」を微小單位としていたはずである。李淳風注と同じように近似計算を工夫したという保證はないが，假にそうであったとして，毫の1/10まで求めて計算すると，表2になる。この場合には，n=24までが有效な計算で，$S_{48}=313.20$，$S_{92}=313.92$となり，

$$313.92<S<314.61$$

が得られる。毫まで求めた計算でも同じ結果になるから，近似の仕方が多少違っていて

表2　劉徽の圓周率算定（圓徑＝2尺＝20000毫）

n	c_n	$a_{2n}{}^2$	a_{2n}	S_{4n}	a_{2n}'	S_{4n}'
	毫	平方毫	毫	平方寸	毫	平方寸
6	1339.8	26795064	5176	310.56	5176.3	310.578
12	340.8	6814910	2610	313.20	2610.5	313.26
24	85.6	1711055	1308	313.92	1308.0	313.92
48	21.5	428226	654	313.92	654.3	314.064
96	5.4	107085	327	313.92	327.2	314.112
192	1.4	26773	163	312.96	163.6	314.112
384	0.4	6693	81	311.04	81.8	314.112

表3 祖沖之の圓周率算定（圓徑＝1丈＝100000000（1/10忽））

n	c_n	$a_{2n}{}^2$	a_{2n}	S_{4n}	π
	1/10忽	1/100平方忽	1/10忽	平方寸	
6	6698729.8108	669872981078100.603796	25881904.5102	7764.57135306	3.105814854122
12	1703708.6856	170370868554914.030596	13052619.2220	7831.57153320	3.132628613280
24	427756.9314	42775693131089.251954	6540312.9230	7848.37454760	3.139349819040
48	107063.8381	10705383807024.253999	3271908.2821	7852.57987704	3.141031950816
96	26770.6262	2677062618183.203625	1636173.1626	7853.63118048	3.141452472192
192	6693.1046	669310452194.987447	818113.9603	7853.89401888	3.141557607552
384	1673.3042	167330412995.692598	409060.4026	7853.95972992	3.141583891968
768	418.3278	41832778247.071401	204530.6291	7853.97615744	3.141590462976
1536	104.5821	10458205499.183490	102265.3680	7853.98026240	3.141592104960
3072	1.1456	2614552058.388271	51132.6907	7853.98129152	3.141592516608
6144	1.6341	653638057.321591	25566.3461	7853.98152192	3.141592608768
12288	0.4086	163409517.000678	12783.1731	7853.98155264	3.141592621056
24576	0.1022	40852379.417122	6391.5866	7853.98161408	3.141592645632
49152	0.0256	10213094.864724	3195.7933	7853.98161408	3.141592645632

も，劉徽の得た計算結果は，だいたいこの範圍に近いものであっただろう。この結果を得たとして，さらに微小單位を「毫」以下に求め，(5)式に着目して桁數を増やすことに思いが及ばなければ，S＝314（π＝3.14）に收束すると考えてしまうのも無理はない。

祖沖之の場合は，『隋書』律暦志上に「圓徑一億を以て一丈と爲す」と述べられていることが注目される。圓徑1億（1×10^8）を1丈とするということは，1は1/10忽である。それによって，1/10忽まで算出しようとした明確な意圖があったことがはっきりする。しかし，圓徑 $d=1\times10^8$ とし，李淳風注のように小數點第1位までの計算を行ったと考えるのは，早計である。實際に試算すると，その豫想は覆され，小數以下の桁數をもっと繰り下げないと，上記の範圍に收まらない。

『隋書』律暦志では，圓周の長さで記しているが，面積に書き直すと，求めた S_{4n} と差冪 ΔS は，少なくとも次の範圍にあることになる。

$$7853981500000000 \leqq S_{4n} < S_{4n}+\Delta S < 7853981750000000,\quad 0<\Delta S<250000000$$

筆者の計算によれば，さらに3桁繰り下げて1/10000忽まで求めないと，正多角形の面積がその範圍に入ることはない。a_{2n} の開方計算も1/10000忽まで求めたとすると（表1・2の a_{2n}' に對應する），表3に示す通り，n＝6144の時に，$a_{12288}=25566.3461$（＝255663.461忽），$S_{24576}=7853981521920000$（＝78539815219200平方忽）が得られ，初めてその範圍に入った値（π＝3.141592608768）が求まる。そして，オーバーフローするまで求めると，n＝24576の時，$a_{49252}=6391.5866$，$S_{98304}=7853981614080000$，また $\Delta S=S_{98302}-S_{49152}=$ 7853981614080000−7853981552640000＝61340000＝（613400平方忽）となり，

$$7853981614080000 < S < 7853981675420000$$

が得られる。これから圓周率を出すと，

$$3.141592645632<\pi<3.141592670168$$

1/10忽までとすると，

$$3.14159264<\pi<3.14159267$$

となる。この推算によれば，祖沖之が正49152角形まで分割し，1/10000忽まで求めたことになる。小數點以下第1位までの計算に言い換えると，圓徑を1千億（1×10^{11}）としたのと同じである。

元の趙友欽は『革象新書』巻5，乾象周髀篇で，內接正6角形でなく，內接正方形から起算した割圓術で16384角形の1邊を算出して，祖沖之の密率が得られたことを記している。祖沖之の算法を（おそらく間接的に）繼承した數少ない例であるが，正12288角形まで分割しなければ，$3.1415926<\pi<3.1415927$が得られないことを，趙友欽の計算は明示してくれている。そのことを三角關數を用いて別の角度から確認することもできる。

すなわち，內接正 2n 角形の1邊 a_{2n} は，圓徑をdとすると，

$$a_{2n}=(d/2\times\sin(360/4n))\times2=d\sin(90/n)$$

で求められる（表4）。割圓術において桁數を大きくして誤差が微小になるように計算したとすれば，表4に示すの眞値に近い數値が得られることになる。また，(4)式を變形した $a_{2n}=S_{4n}/nr$ に，祖沖之の求めた圓周率（正確に言えば S_{4n}）の上限，下限である盈數，朒數を代入して，內接正 2n 角形の1邊の範圍を逆算すると，表5になる。表4の數値が表5の範圍內に入っていなければ，祖沖之の結果は得られない。兩者の比較によって，正 2n 角形の1邊が範圍內に入るnの最小値は，n=6144，すなわち正12288角形の1邊

表4　三角關數による算定

n	a_{2n}
	1/10忽
6	25881904.51025
12	13052619.22200
24	6540312.92301
48	3271908.28217
96	1636173.16264
192	818113.96039
384	409060.40404
768	204530.62911
1536	102265.36803
3072	51132.69070
6144	25566.34618
12288	12783.17319
24576	6391.58661
49152	3195.79330

表5　祖沖之の圓周率からの逆算

n	a_{2n} min	a_{2n} max
	1/10忽	1/10忽
6	26179938.33333	26179939.16666
12	13089969.16666	13089969.58333
24	6544984.58333	6544984.79166
48	3272492.29166	3272492.39583
96	1636246.14583	1636246.19791
192	818123.07291	818123.09895
384	409061.53645	409061.54947
768	204530.76882	204530.77473
1536	102265.38411	102265.38736
3072	51132.69205	51132.69368
6144	25566.34602	25566.34684
12288	12783.17301	12783.17342
24576	6391.58650	6391.58671
49152	3195.79325	3195.79335

25566.3461（2釐5毫5秒6忽 63461/100000）を求めた場合であることが判明する。

以上の考察によれば，祖沖之が劉徽の算定法に依據して，飛躍的に精度を高めることができたのは，「餘徑」に着目した(5)式を利用すれば，圓周率の範圍が1違いの2數閒に限定できることに氣づいたからである。それには，開方計算の桁數を大きくし，小數的に計算していく必要があった。いずれも劉徽の發案になるものである。しかしながら，劉徽自身は，圓徑2千を2尺とした上から5桁の計算で，きわめて粗い近似値しか求めることはできなかったのであるから，(5)式を精度の向上に利用したとは言い難い。割圓術の手法による圓周率の算定は，祖沖之において初めて完結するのである。

そのように考えれば，祖沖之の計算は，單に桁數を大きくしただけであるように見えても，秀でた數理的解析力を認めるべきである。πの歷史において，祖沖之の求めた數値は傑出しているが，上記の結果を見ればさらに精度を高めた値も容易に求めうるし，級數展開による新法が登場する以前においては，算定法の完成度という點でも特筆すべきである。『綴術』が理解されることなく，廢絶してしまったのであれば，その損失は甚大であったと言わざるを得ない。そしてまた，李淳風注を劉徽注とすることで，祖沖之の數學的業績を埋沒させてしまっては，途方もなく桁數の多い計算に情熱を注いだ彼の努力は無に等しいものになってしまうだろう。

最後に中國數學の史的展開を振り返れば，『九章算術』が編纂され，劉徽が注釋書を著わし，祖沖之の『綴術』に至る過程で，圓周率と球の體積公式という大きな數學的課題を段階的に解明したことになる。それは，直線的ではあるが，きわめて勾配が急な發展を遂げているのである。

その理論的な發展に，面積計算における端數處理法が大きな作用を及ぼしたことは，すでに論じた通りである。王莽銅斛，劉徽から祖沖之への飛躍は，「毫」から「忽」へという極小とする單位の變換によって實現したといっても過言ではない。

1尺の千萬分の1の長さである「忽」が最初に登場するのは，現存數學書では『孫子算經』である。4世紀頃に成立したとされる『孫子算經』卷下，問4には，佛書の總文字數を計算する設問があり，佛教との關わりが指摘される。それは，インド數學との交流を必ずしも意味しないが，『九章算術』とは別の流れを生み出していたことは確かである。祖沖之による圓周率の算定が，その合流點において達成されたということは，唐代までの數學史を語る一つの指標を明示しているにちがいない。

6 結びにかえて

本稿において，『九章算術』劉徽注には，李淳風注の混入があることを指摘した。そのことは，祖沖之の數學的業績を明確にするうえで重大な論點であったが，それとは別に『九章算術』現行本の劉徽注に錯簡があるという大きな問題を提起している。テキスト全體を考察するのは今後に期したいが，議論した部分については，少し整理しておきたい。

方田章，圓田術の注釋には，「臣淳風等謹按……」とあったのが，「臣淳風等」4字が缺落していることを指摘した。他所において，李淳風注はその書き出しになっており，劉徽注には「謹按……」という言い方は見られないから，これまで誰も氣づかなかったことのほうが不思議である。そうした見落としは，はたしてこれが唯一の例外であるのだろうかと思われる。

劉徽注か李淳風注かを判別するのは，内容的に容易ではないが，徽率と密率（實は祖沖之の約率）を用いた補正値を注記している部分なら，兩者の區別ははっきりしている。そこで，南宋本（上海圖書館藏南宋嘉定六年本，文物出版社刊影印本による）を調べてみると，「臣淳風等謹按……」となっていない李淳風注がわずかながら存在する。

巻5，商功章の問11及び問13では，次のようになっている。

於徽術，當積五百四尺，四百七十一分尺之一百一十六也。　按密率，爲積五百三尺，三十三分尺之二十六。

於徽術，當積一千六百五十八尺，三百一十四分尺之十三。　依密率，爲積一千六百五十六尺，八十八分尺之四十七。

また，巻4，少廣章，問23，24では，

依密率，立圓徑二十尺，計積四千一百九十尺，二十一分寸之一十。

依密率，爲徑一萬四千六百四十三尺，四分尺之三。

とある。これは，祖沖之が發見した球の體積公式 $V=1/6\ \pi d^3$ において，$\pi=22/7$ として，體積Vから開立方して圓徑dを出したものである。

これらの注釋は，祖沖之の密率（實は約率）を用いているから，明らかに李淳風注である。『九章算術』を除く『算經十書』では，李淳風注は必ず「臣淳風等謹按……」とある。だから，他問の體例によれば「臣淳風等謹按，依密率爲積……」とあるべきである[14]。南宋本の依據したテキストにその脱字があったにちがいない。とすれば，當初は見分けがついていたとしても，南宋本の時點で，劉徽注に李淳風注が混入してしまっている可能性が十分に考えられるのである。

商功章の注釋では，劉徽注と李淳風注の間に1字分のスペースがある。それが，2つの注の區別立てを示しているとすれば，新たなる疑問が生じる。すなわち，南宋本において，例えば巻7，盈不足章の問7，8では，空字の後に「此術意謂」で始まる注釋ある。それを李淳風注としてもいいのか，またそうであるなら少し前の問4でも「此術意謂……」とある注釋はどうなのであろうか。『海島算經』に「臣淳風等謹按此術意……」，『五經算術』巻下に「臣淳風等謹按術意……」とあり，よく似た書き出しになっている。ただし，楊輝本，武英殿聚珍版叢書本では記述の形式が大いに異なっており[45]，性急な結論は愼むべきであるが，檢討すべき事柄であるにちがいない。

商功章の末尾の注釋を見れば，その懸念はさらに大きくなる。問28の注釋は，次のような記載である。

> 於徽術當置米積尺，以三百一十四乘之爲實。二十五乘囷高爲法。所得，開方除之，卽周也。此亦據見冪以求周，失之於微少也。……c_1
>
> 晉武庫中有漢時王莽作銅斛……然不盡得升合勺之文字。……c_2
>
> 按此術，本周自相乘，以高乘之，十二而一，得此積。今還元，置此積，以十二乘之，令高而一，卽復本周自乘之數。凡物自乘，開方除之，復其本（周自乘之）數。故開方除之，卽得也。……c_3
>
> 臣淳風等謹依密率，以八十〔八〕乘之爲實，七乘囷高爲法，實如法而一，〔開〕方除之，卽周也。……c_4

徽率を用いた劉徽注 c_1，密率を用いた李淳風注 c_4 は，他所では對になって連記されている。ところが，ここでは c_2，c_3 がその間に割り込んでいる。それは，劉徽注と見なしたからであるが，すでに考察したように c_2 は李淳風注であった。それなら，c_3 も同樣であろうか。

問28は，圓柱の形をした圓囷の體積と高さから，圓周を求める問題である。c_3 の前半部は，經文の解法公式「置米積尺，以十二乘之，令高而一，所得，開方除之，卽周」が，圓柱の體積公式の還元算になっていることを說明したものである。後半部は，「自乘して開方すると本の數に戻る」と述べて，「自乘」の逆が「開方」となることを補足的に說明したものである。

この解法は，少廣章，問18，開圓術を應用したものであるが，そこの李淳風注には，

> ……其積本周自乘合以一乘之，十二而得積三也。術爲一乘不長，故以十二而一，得此積。今還元（錢寳琮校點本作「原」，下同）置此積三，以十二乘之，復其本周自乘之數。凡物自乘，開方除之，復其本數。故開方除之卽周。

とある。c_3 とほとんど同じ記述になっていることに氣づくだろう。少廣章の末尾の李淳風

注でも，密率による球の補正公式を示した後で，

凡物再自乘，開立方除之，復其本數。故立方除之，卽丸徑也。

とある。

それらは，いずれも劉徽注に言及しているから，確かに李淳風注である。しかも，『算經十書』の李淳風注の多くが，繰り返し同じ形式で注釋していることを考えれば，c_2と同じく，c_3も李淳風注とすることに躊躇する必要はない。

その指摘が正しいとするならば，同類の問題を扱っている直前の２問にも，これまで見逃されてきた錯簡が指摘できるように思われる。

問27の劉徽注を全文引用すると，次の通りである。

以廣袤之冪除積，故得高。按此術，本以廣袤相乘，以高乘之，得此積。今還元，置此〔積〕，廣袤相乘爲法，除之，故得高也。

「按此術」以下の注釋は，還元算によって，體積を底面積（「廣袤相乘」）で割れば，高さが得られることを説明したものである。「今還元，置此」の後に「積」字を補えば，さきほどの李淳風注と同じ形式の記述になる。しかも，前半部をよく見ると，「以廣袤之冪除積，故得高」は，體積を底面積（「廣袤之冪」）で割ると高さが得られるとある。つまり，後半部とは同じことを説明しており，明らかに重複している。ということは，前半部が劉徽注，「按此術」以下が李淳風注であろうか。

問26でも，經文「滅上廣，餘卽下廣」の下に施された注釋は，「按此術……」で始まるが，その前の４つ經文に對する割注と內容的に重複している。これらの劉徽注も，「臣淳風等謹按此術」の最初の５文字が脫落していると見なすべきであるかもしれない。

このように，劉徽注の中に，とりわけ「按此術……」とあるものに，李淳風注が紛れ込んでいるとすれば，大問題である。祖沖之の他の數學的業績に對する考察とともに，『九章算術』の劉徽・李淳風注の再検討も，今後の課題としておきたい。

注

(1) 本稿の論考は，1983年１月に京都大學文學研究科に提出した修士論文「『算經十書』の數理思想」の一部を加筆したものである。その後，劉徽に關する研究書がいくつか刊行されたが，筆者と見解を同じくするものは見られないように思われる。しかし，管見による疎漏があるかもしれないので，あえて修正稿であることを表明しておく。なお，執筆に際して，中國數學史に關しては，Joseph Needham (and Wang Ling)『Science and Civilisation in China』Vol III—19 (Cambridge University Press, 1954, なお邦譯書に芝原茂等共譯『中國の科學と文明』巻４（思索社，1975）がある），李儼『中算史論叢』（科學出版社，1955），錢寶琮主編『中國數學史』（科學出版社，1964，1981重版，なお邦譯書に川原秀城譯『中國數學史』（みすず書房，1990）がある），中國科學院自然科學史研究所編『錢寶琮科學史論文選集』（科學出版社，1983），圓周率の歷

史に關しては，平山諦『改訂新版　圓周率の歴史』（大阪教育圖書，1980）を大いに參照した。

(2) 使用したテキストは，錢寶琮校點『算經十書』（中華書局，1963）に收められているものを用いる。また，郭書春主編『中國科學技術典籍通彙』數學卷１（河南教育出版社，1993）所收の『九章算術』（武英殿聚珍版叢書本）とも校合し，川原秀城譯「劉徽注九章算術」（藪内淸編『科學の名著(2) 中國の天文學・數學集』所收，朝日出版社，1980），白尚恕『《九章算術》注釋』（科學出版社，1983）も參照した。

(3) 『九章算術』卷１，方田章の注釋には，他にも密率という用語が２箇所に見られる。すなわち，弧田術の劉徽注と環田術の密率術である。前者は，割圓術と同じような發想によって，圓弧の形をした田の面積公式を補正しようとするもので，實際には正しく求めることはできなかったが，劉徽も密率という語をすでに用いていることがわかる。後者は，卷末には附記されており，經文になっているが，注釋が紛れ込んでいると考えられている。しかし，劉注であるのか，李注であるのかは判然としない。

(4) 密率355/133の使用例が全くないわけではない。『隋書』律曆志上，嘉量において，後周武帝保定元年玉斗の銘文に記された內徑７寸１分，深さ２寸８分から，（その１升の體積を出して，10倍して）１斛の體積1108.5739立方寸を編者が計算しているが，これは，

$$\{(7.1)^2\times2.8\times355\div(113\times4)\}\times10=1108\ 1297/2260=1108.57389\cdots\cdots\fallingdotseq1108.5739$$

であるから，明らかに $\pi=355/133$ としている。

(5) 「晉武庫中」以下を劉徽注とするか，李淳風注とするかの論爭については，李迪「《九章算術》爭鳴問題的概述」（吳文俊主編『《九章算術》與劉徽』（北京師範大學出版社，1982）揭載）に詳しい。李迪は，李淳風注說を唱える少數派であるが，近刊著書の『中國數學通史　上古到五代卷』（江蘇教育出版社，1997）でも同說を論述している。また，最近出された研究書に，李繼閔『《九章算術》與其劉徽注研究』（陝西人民教育出版社，1990），吳文俊主編『中國數學史大系』卷１―３（北京師範大學出版社，1998）があるが，いずれも劉徽注說を主張する。「謹按」以下からすべて李淳風注としたものは，管見によれば，見當たらないように思われる。

(6) 『中國古代度量衡圖集』（國家計量總局主編，文物出版社，1981。邦譯書に山田慶兒・淺原達郎共譯『中國古代度量衡圖集』（みすず書房，1985）がある）に集錄されている。邦譯書182―183・190―193・196―199頁參照。

(7) 劉徽注では，王莽銅斛の深さ１尺を今尺で測ると0.955尺（９寸５分５釐１毫）であると言うが，圓徑は「毫」の單位まで記しているので，0.9550尺と計算したと思われる。そこで，魏尺１尺を王莽尺に換算すると1.0471尺（１尺４分７釐１毫）になる（$1\div0.9550\fallingdotseq1.0471$）。律曆志では，魏尺の１尺が王莽時の1.047尺（１尺４分７釐）に相當するとあり，１毫小さい。その比率で王莽銅斛の深さ１尺を魏尺に換算すると，0.9551尺になり（$1\div1.047\fallingdotseq0.9551$），劉徽注よりも１毫小さくなる。一方，圓徑について考えれば，王莽銅斛の寸法は庣旁0.0095尺（「九釐五毫」）から算出すると，1.4332尺（１尺４寸３分３釐２毫）である。劉徽注では，王莽尺の1.4332尺を今尺で測ると1.3687尺（１尺３寸６分８釐７毫）であるとしているから，魏尺１尺を王莽尺に換算すると，1.0471尺（１尺４分７釐１毫）になり（$1.4322\div1.3687\fallingdotseq1.0471$），深さと同じ比率を得る。もしも，魏尺を1.047尺として換算すると，圓徑は1.36886……となり，劉徽注よりも１毫大きくなる。1.0471尺の場合を確認すると，1.4332尺は，$1.4332\div1.0471=1.36873\cdots\cdots$となり，端數を切り捨ててちょうど1.3687尺が得られる。「毫」まで求めたための誤差であるが，そのことは，もしかすると劉徽注の數値が實測によるものではなく，王莽尺：魏尺＝１尺：1.0471尺＝１尺：0.9550尺として算出した理論値である，ということを示しているかもしれない。１毫は，１尺の１萬分の１であり，約0.02-3mmの微小値であるから，その可能性は十分ある。そうであれば，劉徽が王莽銅斛の實物を計測したわけではなく，他書に記載された王莽銅斛の寸法から算出したか，あるいは他者の計算結果をそのまま轉載した場合もあることになる。

(8) 呉承洛『中國度量衡史』（商務印書館，1937）參照。

(9) 以下の圓周率の定義についての議論は，楠葉隆德・林隆夫・矢野道雄『インド數學研究』（恆星社厚生閣，1997）第4章の論考に大いに依據している。

(10) 楠葉隆德・林隆夫・矢野道雄前掲書によれば，インドでもこれらの球の體積公式は用いられたようである。例えば，850年項の成立とするマハーヴィーラでは，『九章算術』と同じ公式を粗，張衡と同じ公式を密とする。その書には，3と$\sqrt{10}$の圓周率（$=k_1=4k_2$）が見られるので，やはり$k_1=4k_2=6k_3$の關係を正しく確認したのではなく，$k_3=k_2^2$とした結果であろう。だから，その數學書の場合でも，27/8，15/4の圓周率を用いたとすべきではないように思われる。

(11) 祖暅之の開立圓術については，錢寶琮『中國數學史』第2編，第3章86—90頁（邦譯書94—97頁）參照。

(12) 割圓術の算定法及びその圖解については，錢寶琮『中國數學史』第2編，第3章65—69頁（邦譯書72—75頁）の論考に依據している。

(13) 正96角形の分割までの數値計算は，李潢『九章算術細草圖說』に詳しい注解がある。ただし，それから以降の計算は具體的に示さず，正1536角形の1邊が4090.612582忽になる，それから正3072角形の面積を計算すると314.1590462976平方寸になるという結果だけを記載している。これは，$a_{1536}^2=16733111.3$としたものであるが，筆者の計算とは食い違っている。桁數を1桁繰り下げた計算すれば，その値が得られるが，有效桁數の取り方とともにそれまでの李淳風注の計算とは齟齬を來す。

(14) 四庫全書本では，いずれも「淳風等按，依密率爲積……」に改まっている。ただし，「臣」「謹」の2字が省かれているのは，同書の他所の李淳風注も同じである。

(15) 錢寶琮校點本では，空白はない。四庫全書本では，「此術意謂」以下が文頭にきて，その前文と倒置されている。